Université de Abdelmalek Essaadi
FST de Tanger

Module Analyse I
Filière MIPCI - GEGM

Série $N^0 2$

Exercice 1 *Calculer les limites suivantes si elles existent :*

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\sin(2x)}{x}$, b) $\lim_{x\to \alpha} \frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n}$, c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x-1}{\ln(x+1)}$.

Exercice 2

1. Montrer que toute fonction périodique et non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.(*indication: par l'absurde.*)
2. Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en $+\infty$.(*indication: utiliser la borne supérieure de* $f(\mathbf{R})$)

Exercice 3

Soit f définie par $f(x) = \frac{a}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ avec $a \in \mathbf{R}$.

1. f est-elle continue sur son ensemble de définition ?
2. Déterminez en fonction de a la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1 (si cette limite existe). Même chose en -1. (On précisera éventuellement les limites à gauche et à droite si elles diffèrent.)
3. Déterminez en fonction de a si f peut être prolongée par continuité en 1 ? En -1 ?

Exercice 4

1. Montrer que toute application continue d'un segment dans lui-même admet un point fixe .
2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et bornée. Montrer qu'elle a un point fixe.
3. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer qu'elle est bornée. En déduire qu'elle admet un point fixe.

ETUSUP .com

Exercice 5

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Montrer que f admet au moins une racine.
Application : montrer qu'un polynôme à coefficients rèels de degrè impair admet au moins une racine dans $\mathbf{R}$.

Exercice 6

Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbf{R}^*$ et étudier si on peut les prolonger par continuité sur $\mathbf{R}$.

1. $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$
2. $g(x) = \frac{(1+x)^3-1}{x}$
3. $h(x) = \sin(x)\sin(\frac{1}{x})$
4. $l(x) = \frac{|sin(x)|}{x}$
5. $m(x) = \frac{\sqrt{1+sinx}-\sqrt{1-sinx}}{x}$

Exercice 7

Déterminer les limites suivantes en utilisant la règle de L'Hospital :

$$a)\lim_{x\to1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-4x+3}\ ;\qquad b)\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\ ;\qquad c)\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+2}{(x+2)\ln(x+1)}\ ;$$

$$d)\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x}\ ;\qquad e)\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}\right)\ .$$

Exercice 8 *(Facultatif)*

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^x}{(E(x))^{E(x)}}$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbf{N}$ par $u_n = n$ et $v_n = n + \frac{1}{2}$. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f(v_n)$. Que peut-on conclure pour $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

ETUSUP .com

ETUSUP .com

Exercice 1

a/ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} - \dfrac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 = 1 - 1\times 2 = -1$

b/ $\lim\limits_{x\to \alpha} \dfrac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x^n - \alpha^n} = \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{(x-\alpha)(x^n + x^{n-1}\cdot\alpha + x^{n-2}\cdot\alpha^2 + \dots + x\alpha^{n-1}\cdot\alpha^n)}{(x-\alpha)(x^{n-1} + x^{n-2}\cdot\alpha + x^{n-3}\cdot\alpha^2 + \dots + x\alpha^{n-2} + \alpha^{n-1})}$

$= \dfrac{\alpha^n + \alpha^n + \dots + \alpha^n}{\alpha^{n-1} + \alpha^{n-1} + \dots + \alpha^{n-1}} = \dfrac{(n+1)\alpha^n}{n\,\alpha^{n-1}} = \dfrac{n+1}{n}\alpha.$

c/ $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^x - 1}{\ln(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{x\ln x} - 1}{x\ln x} \cdot \dfrac{x}{\ln(x+1)} \cdot \ln x = 1\times 1\times(-\infty) = -\infty$

Exercice 2

1/ f periodique et non constante $\Rightarrow$ f n'admet pas de limite en $+\infty$

Supposons que f admet la limite ℓ qd $x \to +\infty$, soit $a \in \mathbb{R}$

la suite $x_n = a + nT \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ où T periode de f

Comme f admet la limite ℓ alors $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Or $f(x_n) = f(a+nT) = f(a)$

Par passage à la limite on obtient $f(a) = \ell$ donc f est une fonction constante de valeur egale à ℓ.

2/ f croissante et majorée $\Rightarrow$ f admet une limite fini en $+\infty$

Supposons $I = [a, +\infty[\subset D_f$

f majorée sur I donc f admet une borne superieure $\ell = \sup\limits_{x\in I} f(x)$

(car $f(I)$ est non vide et majorée donc elle admet une borne superieure)

Soit $\varepsilon > 0$ $\exists x_0 \in I$ / $\ell - \varepsilon < f(x_0) \le \ell$

f croissante $\Rightarrow \forall x \in [x_0, +\infty[$: $\ell - \varepsilon < f(x_0) \le f(x) \le \ell \le \ell + \varepsilon$

càd $\exists x_0 > a$ / $x \geq x_0$: $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

d'où $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \ell$

ETUSUP .com

Exercice 3 $f(x) = \frac{a}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{a(1+x)-2}{1-x^2} = \frac{ax+a-2}{1-x^2}$

1/ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ $\quad f_1 : x \longmapsto ax+a-2 \quad f_2 = x \longmapsto 1-x^2$

$\forall x \in D_f : 1-x^2 \neq 0 \iff f_2(x) \neq 0$

$f = f_1/f_2$ continue sur D_f comme rapport de 2 fct continues sur D_f

2/ • $\lim\limits_{1^+} 1-x^2 = 0^-$; $\lim\limits_{1^+} ax+a-2 = 2a-2$

$\lim\limits_{1^-} 1-x^2 = 0^+$; $\lim\limits_{1^-} ax+a-2 = 2a-2$

x		-1		1	
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

si $a>1$ alors $\lim\limits_{1^+} f = \frac{2a-2}{0^-} = -\infty$; $\lim\limits_{1^-} f = \frac{2a-2}{0^+} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{1} f$ n'existe pas

si $a<1$ alors $\lim\limits_{1^+} f = \frac{2a-2}{0^-} = +\infty$, $\lim\limits_{1^-} f = \frac{2a-2}{0^+} = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{1} f$ n'existe pas

si $a=1$ alors $\lim\limits_{1} f = \lim\limits_{1} \frac{-1}{1-x^2} = \lim\limits_{1} \frac{1}{-x-1} = -1/2$

• $\lim\limits_{(-1)^-} 1-x^2 = 0^-$, $\lim\limits_{(-1)^+} ax+a-2 = \lim\limits_{(-1)^-} ax+a-2 = -2$

$\lim\limits_{(-1)^+} 1-x^2 = 0^+$

$\Rightarrow \lim\limits_{(-1)^+} f = \frac{-2}{0^+} = -\infty$ et $\lim\limits_{(-1)^-} f = \frac{-2}{0^-} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{(-1)} f$ n'existe pas

3/ f admet un prolongement par continuité en 1 quand $a=1$

Exercice 4

1/ $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ $\quad c$ point fixe de $f \iff f(c) = c$

Posons $g(x) = f(x) - x$

• f continue sur $[a,b] \Rightarrow g$ continue sur $[a,b]$

$g(a) = f(a) - a \geq 0 \quad g(b) = f(b) - b \leq 0$

$a \leq f(a) \leq b \Rightarrow f(a) - a \geq 0$; $a \leq f(b) \leq b \Rightarrow f(b) - b \leq 0$

D'après le T.V.I : $\exists\, c \in]a,b[\,/\, g(c) = 0$ càd $f(c) = c$

2/ f continue et bornée $\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} \,/\, f(c) = c$

f bornée : $\exists\, M > 0 \,/\, \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| < M$ càd $-M \leq f(x) \leq M$

Considérons la fonction $g(x) = f(x) - x$

On a $-M \leq f(x) \leq M \Rightarrow -x-M \leq f(x) - x \leq M - x \Rightarrow -x-M \leq g(x) \leq M-x$

g continue car f continue et $\lim\limits_{-\infty} -x \pm M = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} -x \pm M = -\infty$

d'où $\lim\limits_{-\infty} g(x) = +\infty > 0$ et $\lim\limits_{+\infty} g(x) = -\infty < 0$ $\quad$ TVI $\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} \,/\, g(c) = 0$ càd $f(c) = c$.

Institut la centrale — Analyse 1 — Fonctions

Série N: 2 — S2 (suite) ②

EXERCICES

1/ $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

- $x \xmapsto{f_1} \frac{1}{x}$ et $f_2 : x \xmapsto{f_2} \sin x$ sont continues respectivement sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}$ donc $f = f_2 \circ f_1$ est continue sur $\mathbb{R}^*$
- Considérons la suite $(x_n) =$ par : $x_n = \frac{1}{\pi/2 + n\pi}$

$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $f(x_n) = \sin(\pi/2 + n\pi) = \cos n\pi = (-1)^n$ diverge (et donc ne converge pas) car les 2 sous suites extraites $(-1)^{2n} = 1$ et $(-1)^{2n+1} = -1$ ne convergent pas vers la même limite

2/ $g(x) = \frac{(1+x)^3 - 1}{x}$ continue sur $D_g = \mathbb{R}^*$ (fct rationnelle)

$\lim_0 g(x) = \lim_0 \frac{x^2 + 2x}{x} = \lim_0 x + 2 = 2$ donc on peut prolonger g par continuité en 0

3/ $h(x) = \sin x \cdot \sin\frac{1}{x}$

$x \longmapsto \frac{1}{x}$ cont sur $\mathbb{R}^*$, $x \longmapsto \sin x$ cont sur $\mathbb{R}$ donc h cont sur $\mathbb{R}^*$

$|h(x)| = |\sin x \sin\frac{1}{x}| \leq |\sin x|$ car $\forall x \neq 0$ $|\sin\frac{1}{x}| < 1$

$\lim_0 |\sin x| = 0 \Rightarrow \lim_0 h(x) = 0$ donc on peut prolonger h

4/ $\ell(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ $\lim_{0^+} \ell(x) = \lim_{0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{0^-} \ell(x) = \frac{-\sin x}{x} = -1$

la limite en 0 n'existe pas donc on ne peut pas prolonger ℓ

5/ $m(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$

- $\forall x \in \mathbb{R}^* : -1 \leq \sin x \leq 1$ donc $1 + \sin x \geq 0$ et $1 - \sin x \geq 0$

$x \longmapsto 1 + \sin x$ et $x \longmapsto 1 - \sin x$ cont sur $\mathbb{R}^*$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$ cont sur $\mathbb{R}^+$ donc $x \longmapsto \sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}$ cont sur $\mathbb{R}^+$ donc de même m

- $\lim_0 m(x) = \lim_0 \frac{(\sqrt{1+\sin x})^2 - (\sqrt{1-\sin x})^2}{x(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x})} = \lim_0 \frac{(1+\sin x) - (1-\sin x)}{x(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x})}$

$= \lim_0 \frac{2\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ donc on peut prolonger m par cont en 0 ;/

Exercice 7

a/ $\lim\limits_{1} \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-4x+3} = \lim\limits_{1} \dfrac{3x^2-4x-1}{3x^2-4} = \lim\limits_{1} \dfrac{6x-4}{6x} = 6/6 = 1$

b/ $\lim\limits_{0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{0} \dfrac{\sin x}{2x} = 1/2$

c/ $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2+3x+2}{(x+2)\ln(x+1)} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{(x+2)(x+1)}{(x+2)\ln(x+1)} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x+1}{\ln(x+1)} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{x+1}} = \lim\limits_{+\infty} x+1 = +\infty$

d/ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{1} = \dfrac{0}{2} = 0$

Exercice 8 $\quad f(x) = \dfrac{x^x}{E(x)^{E(x)}} \quad U_n = n \quad V_n = n+1/2$

$n \leq n+1/2 < n+1$

- $f(U_n) = \dfrac{n^n}{n^n} = 1 \qquad f(V_n) = \dfrac{(n+1/2)^{n+1/2}}{n^n}$

- $f(V_n) = \dfrac{e^{(n+1/2)\ln(n+1/2)}}{e^{n\ln n}} = e^{(n+1/2)\ln n(1+\frac{1}{2n})-n\ln n} = e^{(n+\frac{1}{2})(\ln n+\ln(1+\frac{1}{2n}))-n\ln n}$

$= e^{n\ln n+n\ln(1+\frac{1}{2n})+1/2\ln n+\frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{2n})-n\ln n} = e^{n\ln(1+\frac{1}{2n})}\cdot e^{1/2\ln n}\cdot e^{1/2\ln(1+1/2n)}$

$= e^{2\cdot\frac{\ln(1+\frac{1}{2n})}{1/2n}}\cdot e^{1/2\ln n}\cdot e^{1/2\ln(1+1/2n)}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(U_n) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(V_n) = e^2\times(+\infty)\times 1 = +\infty$

(U_n) et (V_n) sont suites divergentes vers $+\infty$ et $(f(U_n))$ et $(f(V_n))$ sont de suite qui n'ont pas la meme limite donc la fonction f n'admet de limite qd $x \longrightarrow +\infty$.

Ex8

- f continue et $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ alors

$0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = 0$

- f polynome, de degré impair $\quad f(x) = ax^{2n+1} + \dots$

alors $(\lim\limits_{-\infty} f)(\lim\limits_{+\infty} f) = -\infty < 0$

f continue donc $\exists\, x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = 0$

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Divers
Multimedia
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..